MÉTHODOLOGIE VII (OU V BIS) CORRECTION

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES.

Dans cette fiche méthode, nous allons passer en revue les questions les plus fréquentes des exercices d'algèbre linéaire et nous donner des méthodes pour les résoudre.

La difficulté de ces questions est plutôt de nature théorique. En fait (en caricaturant un peu), la seule technique qui est demandée est de **savoir résoudre des systèmes linéaires d'équations**.

Avant de commencer à faire cette fiche, il faut donc s'assurer d'être bien à l'aise avec les systèmes linéaires et peut-être faudrait-il passer le temps d'en résoudre quelques uns (voir par exemple le chapitre concerné du cours de ECG 1). Résoudre un système linéaire signifie que l'on sait **donner une famille génératrice de l'espace des solutions**. Un moyen efficace et systématique consiste à appliquer la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1.- *Préliminaires.*

Recopier l'ébauche de fiche méthode suivante et remplacer *les parties en italique* par les parties du cours appropriées.

Dans un exercice de concours, on demande de

- **Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.**

  Dans ce cas, c'est forcément un espace de référence, il suffit donc de citer le cours.

  Quels sont les espaces de référence ?

- **Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence.**

  1. Si dans la même question (ou quelques questions plus loin), on demande d'en trouver en plus une famille génératrice ou une base, il faut chercher à écrire cet ensemble sous forme de $\text{Vect}(\cdots)$.

  Quel théorème est utilisé ici ? Penser à le citer dans votre rédaction.

  2. Si on ne demande rien de plus sur cet espace, il faut utiliser la caractérisation abstraite.

  Que dit cette caractérisation abstraite ?

- **Montrer qu'une famille est libre, ou que c'est une base d'un (sous)-espace vectoriel.**

  Supposons qu'on ait déjà trouvé une famille génératrice $(e_1, \cdots, e_p)$ d'un sous-espace vectoriel (voir le point précédent). Il s'agit maintenant de trouver une base. Deux cas se présentent ici : soit la famille génératrice dont on dispose est déjà une base et il va s'agir de le démontrer (voir le **1.** ci-dessous) ; soit la famille génératrice n'est pas une base et on va chercher à la réduire pour en extraire une base (voir le **2.** ci-dessous).

  On commencera par tester les méthodes du point **1.** et si elles ont échoué, on passera au point **2.**

  1. On veut montrer que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base

  a. Une base est par définition une famille libre et génératrice, il reste donc à montrer que la famille est libre.

  b. *Que peut-on se contenter de vérifier si la famille n'a qu'un seul vecteur ($p = 1$) ?*

c. *Que peut-on se contenter de vérifier si la famille n'a que deux vecteurs ($p = 2$) ?*

d. Si la famille a au moins 3 vecteurs, on utilise la définition de famille libre.
Rappeler la définition.

2. On veut extraire une base de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$.
C'est un cas un peu plus difficile et il est moins fréquent.
Si on en est là, c'est que les méthodes du point **1.** ont échoué. La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ n'est donc pas libre : elle est liée. Ceci signifie que l'un des vecteurs de cette famille est une combinaison linéaire des autres. Et on a déjà trouvé cette combinaison linéaire puisque c'est comme ça qu'on s'est aperçu que la famille n'était pas libre. On retire alors ce vecteur de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ et on recommence au point **1.** avec cette nouvelle famille.
Au bout d'un certain nombre d'étapes (point **1.** et éventuellement point **2.**) on construit une sous-famille de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ qui est libre.

- **Trouver la dimension d'un sous-espace vectoriel.**
  Il suffit d'en trouver une base (voir les points précédents).
  Pourquoi ?
- **Montrer qu'une application est linéaire.**
  Il suffit d'utiliser la définition.
  Rappeler la définition d'une application linéaire. Remarque : il y a trois formulations équivalentes de cette définition.
- **Déterminer le noyau et/ou l'image d'une application linéaire.**
  Notons ici $f : E \to F$ cette application.

1. Pour le noyau, on résout l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in E$. C'est un système d'équations linéaires. Le résoudre doit permettre de trouver une famille génératrice, puis une base de l'ensemble des solutions.

2. Dans le cas où on demande de trouver une base de l'image, on connaît en général une base de E, disons $(e_1, \cdots, e_p)$. Dans ce cas, on sait que $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de l'image (c'est le cours). Pour trouver une base de l'image, on est donc ramené à un des points précédents.

3. On peut connaître la dimension du noyau si on connaît celui de l'image et inversement.
Grâce à quel résultat ?

Remarque. Pour les questions suivantes, il est très fréquent que la dimension de l'espace soit 2,3 ou 4. Les matrices sont donc des matrices carrées de taille 2×2, 3×3 ou 4×4.

- **Montrer qu'un vecteur est vecteur propre.**
  Que faut-il vérifier ?
- **Montrer qu'un nombre λ est valeur propre d'une matrice.**
  Quel système faut-il résoudre ? Que sont les solutions de ce système vis-à-vis de λ ?
- **Trouver les valeurs propres d'une matrice carrée.**

1. Dans le cas général, *quel système faut-il résoudre ?* La question est rare car un peu difficile si on n'a aucune information supplémentaire. Les points **2.** et **3.** sont plus fréquents.

2. Si la matrice est de taille 2×2, *comment doit-on procéder.*

3. *Comment peut-on exploiter un polynôme annulateur ?*

- **Mêmes questions dans le cas d'un endomorphisme.**
  Dans ce cas, on cherche la matrice de l'endomorphisme dans une base (par exemple la base canonique) et on est ramené aux cas précédents.

- **Décider si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable.**
  1. *Pourquoi doit-on vérifier immédiatement si la matrice est symétrique avant d'envisager les autres méthodes ?*
  2. *Que peut-on dire si il y autant de valeurs propres que la dimension ? (3 valeurs propres en dimension 3 par exemple.* Ce cas est très fréquent.
  3. Dans le cas général, c'est plus difficile.
     a. On cherche les valeurs propres de l'endomorphisme.
     b. On trouve une base de chaque espace propre.
     c. On en déduit la dimension de chaque espace propre, puis la somme des dimensions de tous les espaces propres.
     d. Si cette somme est égale à la dimension de l'espace vectoriel, alors l'endomorphisme est diagonalisable, sinon il ne l'est pas.

Exercice 2.-
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels (en précisant de quel espace vectoriel de référence) et en donner une base et la dimension.

1. $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0, x = 0\right\}$
2. $F_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a + b = 0\right\}$.
3. $F_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
4. $G = \{(u_n)_n / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$.
5. $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0 = P(-1)\}$.
6. $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X) = -P(-X)\}$.

Exercice 3.-
Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires.

1.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (11x - 8y, -8x - y) \end{array}.$$

2.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 3y + z, x + y, x + 2y + z) \end{array}.$$

3.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{trace}(M) I \end{array}.$$

4.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M + {}^tM \end{array}.$$

5.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(aX + 1 - a) \end{array}.$$

6.
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) + 2P(X) \end{array}.$$

Exercice 4.-
Trouver le noyau et l'image des applications précédentes (en donner une base). Vérifier dans chacun des cas que le théorème du rang est satisfait.

Exercice 5.-
Trouver les valeurs propres et les espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis décider si A est diagonalisable ou non.

Exercice 6.-
On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les deux polynômes $P(X) = (2-X)(4-X)^2$ et $Q(X) = (2-X)^3$

1. Montrer que le polynôme P est annulateur de la matrice A et que le polynôme Q est annulateur de B.
2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?
3. Calculer les puissances de ces deux matrices (c'est plus difficile pour B).

Correction 6.-
1. On vérifie effectivement en faisant le calcul des différentes matrices et des différents produits.
2. De ces deux calculs, on déduit que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{2, 4\}$ et $\mathrm{Sp}(B) \subset \{2\}$ (attention c'est bien une inclusion et pas nécessairement une égalité que l'on obtient). Pour trouver les valeurs propres de A, il faut donc vérifier si 2 et 4 sont effectivement valeurs propres (mais on sait déjà qu'il ne peut ps y en avoir d'autres). De même pour B, il s'agit de vérifier si 2 est effectivement valeur propre.

   On calcule donc $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3)$ en résolvant le système d'équations. Après calculs, on obtient,

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x = z \quad \text{et } y + 2x = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

   De même pour $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_3)$ et on a

$$E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

   On procède encore de même pour B et pour la seule valeur propre 2. On a

$$E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y = 2x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} \quad x, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

   Pour conclure sur la diagonalisabilité, il suffit donc maintenant de calculer les sommes des dimensions de tous les espaces propres.

   Pour A, on a

$$\dim E_2(A) + \dim E_4(A) = 1 + 2 = 3$$

   donc A est diagonalisable.

   Pour B, on a

$$\dim E_2(B) = 2 < 3$$

donc B n'est pas diagonalisable.

3. Calculons les puissances de A. Pour cela, on utilise la stratégie classique, qui consiste à transiter par la forme diagonale de A. Soit donc

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On sait que $\mathcal{B}$ est une base car elle est constituée par la réunion de bases d'espaces propres différents. Par ailleurs $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres, elle diagonalise donc l'endomorphisme associé à A. Ainsi, soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Pour cette matrice, on trouve facilement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On a ensuite

$$A^k = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut enfin rendre ce calcul du produit de ces trois matrice complètement explicite. On obtient

$$A^k = P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{k-1} + 1/2 \times 4^k & 3 \times 2^{k-1} - 1/2 \times 4^k & -2^{k-1} - 4^k \\ -2^{k-1} - 1/2 \times 4^k & 3 \times 2^{k-1} + 1/2 \times 4^k & -2^k - 4^k \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B, il faut être un réfléchir un peu plus, puisqu'on ne peut pas la diagonaliser. En effet, la famille maximal de vecteurs propres que l'on peut construire est la famille

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

qui est, certes, une famille libre, mais qui n'est pas une base (il nous manque un vecteur).

Pour calculer les puissances de B, on peut se souvenir que

$$(2\mathrm{I}_3 - B)^2 = 0$$

et **puisque B et $2\mathrm{I}_3$ commutent**, on peut appliquer la formule du binôme. On a donc

$$B^2 - 4B\mathrm{I}_3 + 4\mathrm{I}_3 = 0$$

puis

$$B^2 = 4B - 4\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -16 & 12 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut raisonner à l'identique pour les puissances supérieures de B. On pose

$$C = B - 2\mathbb{I}_3,$$

de sorte que $B = C + 2\mathrm{I}_3$ et que $C^n = 0$ pour $n \geqslant 2$. Ainsi

$$B^n = (C + 2\mathrm{I}_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k 2^{n-k} \mathrm{I}_3 = 2^n \mathrm{I}_3 + n 2^{n-1} C$$

et le reste des termes de cette somme est nul puisque les puissances de C s'annulent à partir de 2.

Exercice 7.-

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2. \end{pmatrix}$$

1. Montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de A. On admet que ce sont les seules valeurs propres.

2. Déterminer les espaces propres associés.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Soit u un vecteur propre pour A pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs v puis w tels que

$$f(v) = 2v + u \quad \text{et} \quad f(w) = 2w + v.$$

5. Soit e un vecteur propre pour la valeur propre 1. Montrer que la famille (e, u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^4$ puis trouver la matrice de l'endomorphisme associé à A dans cette base.

Correction 7.- **1.** et **2.** On cherche donc à montrer que les espaces propres E_1 et E_2 sont non nuls. Pour la recherche de E_1, il s'agit de résoudre le système $AX = X$, ce qui donne, si on pose des coordonnées pour X,

$$\left\{\begin{array}{rcl} -8x - 3y - 3z + t & = & x \\ 6x + 3y + 2z - t & = & y \\ 26x + 7y + 10z - 2t & = & z \\ 2t = t & & \end{array}\right. .$$

que l'on résout et on trouve

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

De même pour $E_2(A)$. On trouve

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

3. La matrice n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des deux espaces propres est 2 et non 4.

4. Pour u c'est encore un système d'équations qu'il faut résoudre (cette fois-ci avec second membre). On trouve par exemple (il y a plusieurs solutions)

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puis on recommence pour w et on trouve par exemple

$$w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. On montre que la famille (e, u, v, w) est une base par la méthode usuelle. Enfin, on a (par définition des vecteurs u, v et w)

$$\mathrm{Mat}(A, (e, u, v, w)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$